HOCHSCHULE MITTWEIDA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

BACHELORARBEIT

Frau
Maria Milaschewski

Chordale Graphen

Eigenschaften und Algorithmen

Mittweida, 2013

Fakultät Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik

BACHELORARBEIT

Chordale Graphen

Eigenschaften und Algorithmen

Autor:
Frau
Maria Milaschewski

Studiengang:
Angewandte Mathematik

Seminargruppe:
Ma09w1-B

Erstprüfer:
Prof. Dr. rer. nat. Peter Tittmann

Zweitprüfer:
Prof. Dr. rer. nat. Kristan Schneider

Einreichung:
Mittweida, 23.01.2013

Verteidigung/Bewertung:
Mittweida, 2013

Bibliografische Beschreibung:

Milaschewski, Maria:
Chordale Graphen – Eigenschaften und Algorithmen. -2013. -V, 30, I S.
Mittweida, Hochschule Mittweida, Fakultät Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik, Bachelorarbeit, 2013

Referat:

In dieser Arbeit wird die Klasse der Chordalen Graphen vorgestellt. Dafür werden zunächst einige Grundlagen zu den Chordalen Graphen vorgestellt wie wichtige Definitionen, Eigenschaften, einige Sätze zu dieser Graphenklasse und ein Überblick über wichtige Literatur. Anschließend wird beschrieben, wie man Chordale Graphen erkennen kann und mit welchen anderen Graphenklassen sie im Zusammenhang stehen. Abschließend wird noch auf zwei der bekanntesten Algorithmen für Chordale Graphen eingegangen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

PES, PEO	Perfektes Eliminationsschema, Perfekte Eliminationsordnung
SEO	Starke Eliminationsordnung
LBS	Lexikographische Breitensuche
MCS	Maximum Cardinality Search
MEC	Maximal Element in Component
MCC	Maximum Cardinality in neighboorhood in Component
AGT & PG	Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs [2]

Symbolverzeichnis

G	Graph
$\overline{G}$	Komplement von G
V	Knotenmenge
E	Kantenmenge
e	Kante
v	Knoten
n	Mächtigkeit der Knotenmenge
m	Mächtigkeit der Kantenmenge
G_A	Der Graph, dessen Knotenmenge die Menge A ist
$d(v,w)$	Abstand zweier Knoten
H	Teilgraph
C_n	Kreis mit n Knoten
K_n	vollständiger Graph mit n Knoten
$G \setminus v$	Entfernung des Knoten v (und aller zu v inzidenten Kanten) aus G
i	Index
$\mathscr{N}(v)$	Nachbarschaft von v
$\mathscr{N}^-(v_i)$	Nachbarschaft von v mit Index kleiner i
$\mathscr{N}^+(v_i)$	Nachbarschaft von v mit Index größer i
S	Trennende Knotenmenge
α	Knotenordnung
$\alpha^{-1}(i)$	Der Index, der v von α zugeordnet wird
$\mathscr{L}_i$	Menge der Knoten mit Index größer i
$\chi(G)$	Chromatische Zahl von G
$\alpha(G)$	Unabhängigkeitszahl von G
$\omega(G)$	Cliquenzahl von G
$\rho(G)$	Partitionszahl von G
$\mathscr{S}$	Menge aller unabhängigen Mengen eines Graphen

Einleitung

Die Geschichte der Graphentheorie beginnt bereits im Jahr 1736, als sich Leonhard Euler der Frage stellte, ob es einen Rundgang durch Königsberg gibt, bei dem man jede der sieben Brücken über die Pregel genau einmal überquert. In Abbildung 0.1 wird dieses Problem durch den sogenannten Eulergraphen dargestellt. Die Punkte (Knoten) stellen die einzelnen Ufer dar und die Linien (Kanten), die diese Punkte miteinander verbinden, sind die dazugehörigen Brücken.

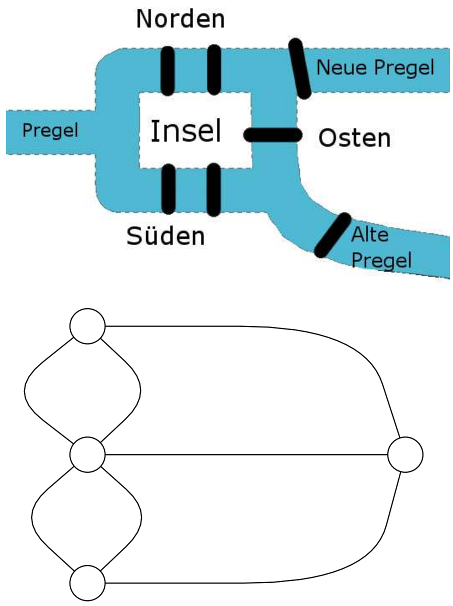


Abbildung 0.1: Das Königsberger Brückenproblem

Mithilfe dieser Figur reduziert sich das Problem darauf, einen Rundweg in dem Graphen zu finden, der jede Kante genau einmal durchläuft. Solch ein Rundweg wird auch Eulerweg genannt. Wenn allerdings ein Eulerweg existieren soll, muss zu jedem Knoten eine gerade Anzahl an Kanten führen, da man, wenn man einmal auf eine Insel gelangt ist, über eine andere Brücke wieder ans andere Ufer muss. Euler konnte nun zeigen, dass solch ein Rundweg nicht möglich ist, da zu jedem Ufer eine ungerade Anzahl von Brücken führte.

Dies war die Geburtsstunde der Graphentheorie, welche ein Teilgebiet der diskreten Mathematik ist. Hier werden Eigenschaften und Beziehungen von mathematischen Graphen analysiert. Als Graph versteht man eine aus Knoten und Kanten zusammengesetzte Struktur.
Bekannte Probleme der Graphentheorie sind das Briefträgerproblem (Chinese Postman Problem), das Problem des Handelsreisenden (Traveling Salesman Problem) und das Vier-Farben-Problem. Beim Briefträgerproblem geht es darum für die Zustellung von Briefen den kürzesten Weg zu finden. Der chinesische Mathematiker Mei Ko Kwan untersuchte das Problem erstmals 1962. Beim Problem des Handelsreisenden sollen mehrere Orte besucht werden, wobei die gesamte Reiseroute bis zur Rückkehr zum Ausgangspunkt möglichst kurz sein soll. Im Jahr 1852 fragte sich Francis Guthrie, ob man jede Landkarte mit vier Farben färben kann, so dass keine aneinander grenzenden Länder die gleiche Farbe haben. Der einzig richtige Beweis für dieses Problem ist computergestützt. Die per Hand entwickelten Beweise erwiesen sich bis jetzt immer wieder als falsch.
In der Graphentheorie gibt es viele verschiedene Klassen von Graphen. Für manche sind die oben beschriebenen Probleme leichter lösbar als für andere. Die bis jetzt bekannten Graphenklassen sind so vielfältig, dass es nahezu unmöglich ist, wirklich alle aufzulisten. Brandstädt, Spinrad und Le [5] beschreiben in ihrem Buch einige der wichtigsten Klassen und auch im Internet (s. [20]) sind Übersichten zu finden.

1 Grundbegriffe der Graphentheorie

Das Paar $G = (V, E)$ ist ein (ungerichteter) **Graph** G bestehend aus einer endlichen **Knotenmenge** V und einer endlichen **Kantenmenge** E, so dass jeder Kante eindeutig ein oder zwei Knoten aus V zugeordnet werden. Die Elemente von V werden **Knoten** genannt und die Elemente von E sind die **Kanten** des Graphen. Als **Komplement** $\overline{G}$ eines Graphen G wird der Graph bezeichnet in dem diejenigen Knoten von G adjazent sind, welche im Ausgangsgraph nicht adjazent sind und umgedreht.

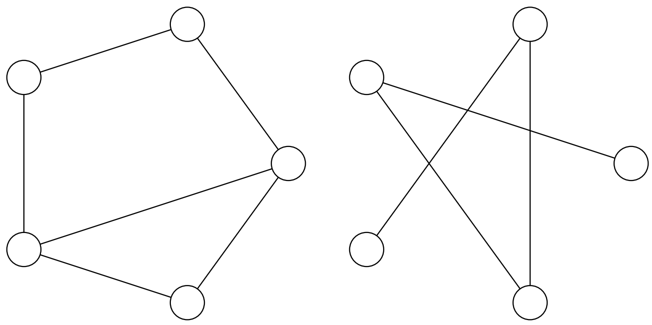


Abbildung 1.1: Ein Graph und sein Komplement

Ein Graph heißt **planar**, wenn es für ihn eine Darstellung in der Ebene gibt, so dass sich keine Kanten schneiden. In einem **gerichteten** Graphen verbindet jede Kante $e \in E$ genau einen Startknoten $v \in V$ mit genau einem Endknoten $w \in V$. Kanten der Form (v, v) werden **Schleifen** genannt und wenn mehrere Kanten zwischen zwei Knoten v und w existieren werden diese als **Mehrfachkanten** bezeichnet. Ein Graph heißt **schlicht**, wenn er keine Schlingen und mehrfache Kanten enthält.

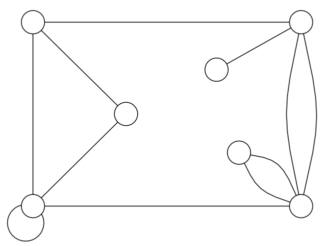


Abbildung 1.2: Ein ungerichteter Graph mit einer Schlinge und Doppelkanten

Die Mächtigkeit der Knoten- bzw. Kantenmenge ist im Folgenden immer $n = |V|$ bzw. $m = |E|$. Ein Graph $H = (W, F)$ ist ein **Teilgraph** von G, wenn gilt $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$. Als **induzierten Teilgraph** bezeichnet man wiederum jenen Teilgraph $H = (W, F)$ der alle Kanten enthält die in G zwischen den Knoten aus W verlaufen.
Eine **Kantenfolge** von G ist eine alternierende Folge von Knoten und Kanten der Form $K = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... v_{k-1} e_k v_k, v_j \in V, e_i \in E, 0 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq k$, so dass die Kante e_i die Endknoten v_{i-1} und v_i hat. v_0 wird als **Anfangsknoten** und v_k als **Endknoten** bezeichnet. Die **Länge** einer Kantenfolge ist die Anzahl der enthaltenen Kanten. Der **Abstand** $d(v, w)$ ist die Länge einer kürzesten Kantenfolge von v nach w. Wenn die Knoten der Kantenfolge unterschiedlich sind wird sie **Weg** genannt. Sind der Anfangs- und der Endknoten eines Weges gleich, handelt es sich um einen **Kreis**. Enthält ein Kreis jede Kante des Graphen genau einmal, wird er **eulersch** genannt. Solch ein Kreis war bei dem Königsberger Brückenproblem gesucht. Ein Kreis als eigenständiger Graph C_n ist ein Graph, der nur aus einem Kreis besteht der durch alle Knoten des Graphen geht.

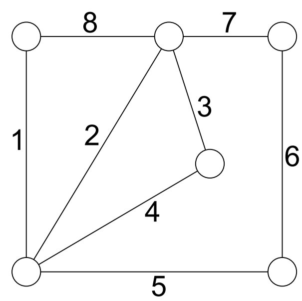


Abbildung 1.3: Ein Eulerkreis in einem Graphen

Ein Graph ist **zusammenhängend**, wenn zwischen jedem Paar von Knoten eine Kantenfolge existiert. Wenn zwischen jedem Knotenpaar eines Graphen auch eine Kante existiert, so heißt er **vollständiger Graph**. Im Gegensatz dazu ist ein **leerer Graph** ein Graph ohne Kanten, d.h. $E = \emptyset$. Ein Knoten $v \in V$ heißt **inzident** zu einer Kante $e \in E$, wenn v ein Endknoten von e ist. Ebenso heißen zwei Kanten adjazent, wenn sie einen gemeinsamen Endknoten besitzen. Zwei Knoten v und w heißen **adjazent**, wenn $(v, w) \in E$. Alle Knoten aus V, die zu einem Knoten $v \in V$ adjazent sind, werden als **Nachbarschaft** $\mathscr{N}(v)$ von v bezeichnet. Die Anzahl der Kanten, die zu einem Knoten $v \in V$ adjazent sind, bestimmt den **Grad** des Knotens.
Falls nicht anders definiert, ist hier ausschließlich von schlichten, ungerichteten Graphen der Form $G = (V, E)$ die Rede.

2 Grundlegendes zu chordalen Graphen

2.1 Definition

Sei C ein Kreis und $x, y \in C$ zwei verschiedene Knoten, die nicht durch eine in C enthaltene Kante verbunden sind. Dann wird eine Kante, die die beiden Knoten verbindet **Sehne** von C genannt. [16]

***Definition* 1**
Ein schlichter Graph heißt **chordal**, wenn jeder seiner induzierten Kreise mit mehr als drei Knoten eine Sehne, im Englischen 'chord' genannt, hat. [16] Daher stammt auch die Bezeichnung chordaler Graph.

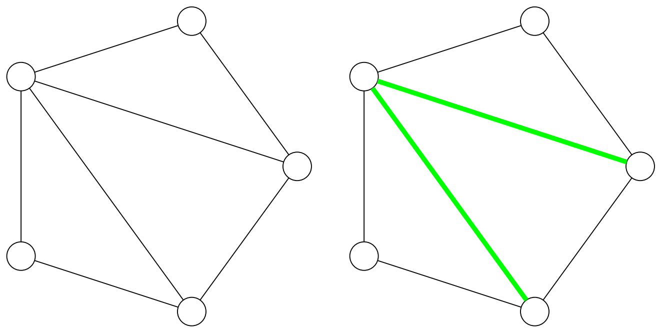
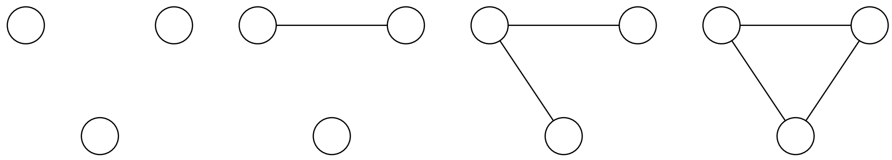


Abbildung 2.1: Ein einfacher chordaler Graph

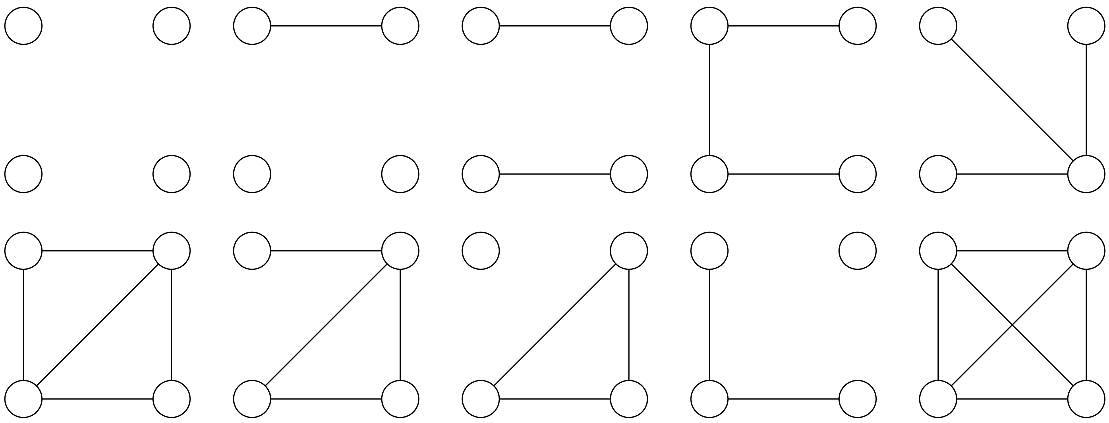
Äquivalent dazu kann man definieren, dass kein C_n mit $n \geq 4$ als induzierter Teilgraph enthalten ist.

Für chordale Graphen mit einem Knoten gibt es nur den leeren Graphen. Mit zwei Knoten sind schon zwei Graphen möglich, der leere Graph und ein Pfad der Länge zwei.

Die Anzahl der einfachen chordalen Graphen mit drei Knoten beträgt vier.

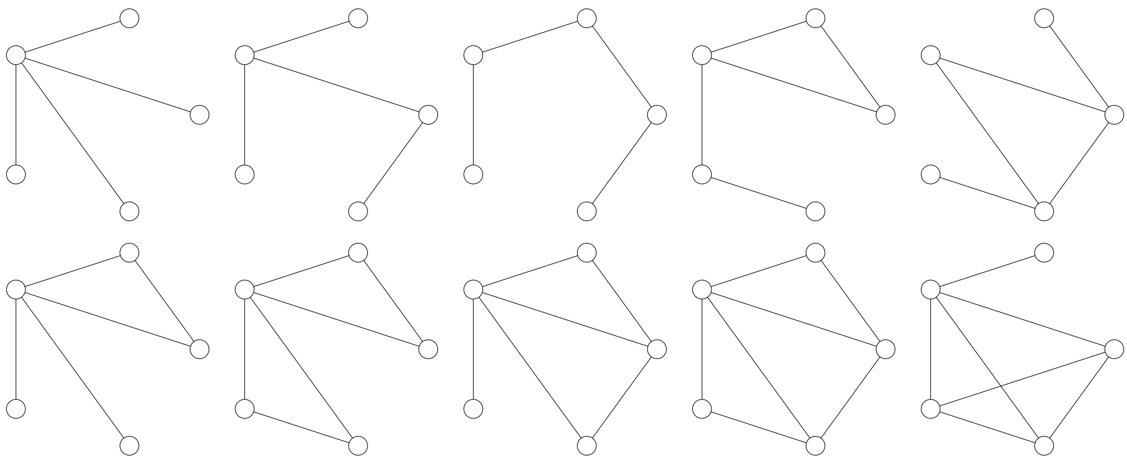


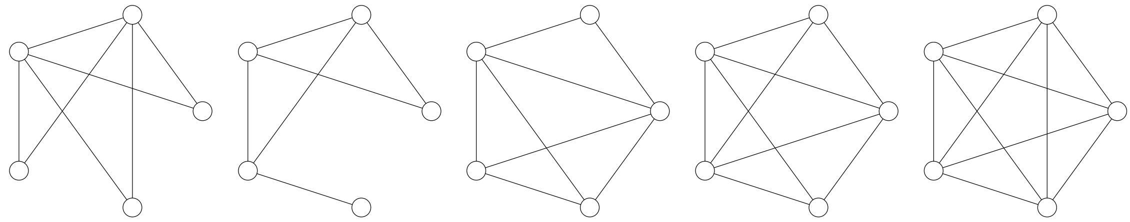
Von den einfachen chordalen Graphen mit vier Knoten existieren zehn.



Für einfache chordale Graphen mit fünf Knoten gibt es 27, mit sechs Knoten 94, mit sieben Knoten 393 Möglichkeiten und so weiter. Betrachtet man nur die zusammenhängenden Graphen so existieren für $n = 1, 2, ...$ jeweils 1, 1, 2, 5, 15, 58, 272 ... einfache chordale Graphen.[18]

Es gibt 15 zusammenhängende einfache chordale Graphen mit fünf Knoten.





Chordale Graphen werden unter anderem auch als Triangulierte Graphen bezeichnet. Allerdings sollte man sie nicht mit den Dreiecksgraphen verwechseln.

***Definition* 2**
Als **Dreiecksgraph** wird ein planarer Graph bezeichnet, bei dem jede Fläche durch einen Kreis der Länge drei umrandet wird.

Der K_5 zum Beispiel ist ein chordaler Graph, aber da er nicht planar ist, zählt er nicht zu den Dreiecksgraphen.

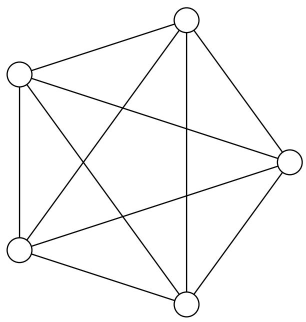


Abbildung 2.2: Der K_5

Umgedreht ist ein Kreis der Länge vier mit einem Knoten in der Mitte, der mit allen anderen Knoten verbunden ist, zwar ein Dreiecksgraph aber kein chordaler Graph, da ein Kreis der Länge vier ohne Sehne existiert.

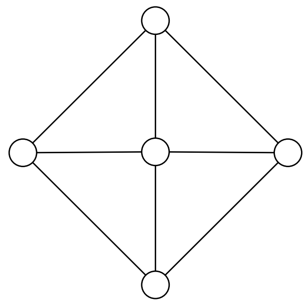


Abbildung 2.3: Ein Dreiecksgraph ohne die Chordalitätseigenschaft

2.2 Wichtige Eigenschaften

Für gegebene Problemstellungen ist die Komplexität interessant. Man unterscheidet zwischen den drei wichtigen Problemklassen $\mathcal{P}$,$\mathcal{NP}$ und $\mathcal{NPC}$. Die Problemklasse $\mathcal{P}$ ist die Menge der Entscheidungsprobleme, für die es einen Algorithmus gibt, der zu jeder möglichen Eingabe in polynomialer Zeit die Antwort liefert. Ein Algorithmus hat eine polynomielle Laufzeit, wenn die benötigte Rechenzeit höchstens polynomiell mit der Eingabe n des Problems wächst. Die Klasse $\mathcal{NP}$ wiederum enthält alle Entscheidungsprobleme, für die ein polynomieller Algorithmus existiert, der testet, ob eine gegebene Lösung tatsächlich die Lösung des Problems ist. Ein Optimierungsproblem ist $\mathcal{NP}$-hart, wenn das dazu gehörige Entscheidungsproblem auch $\mathcal{NP}$-hart ist.

Einige der auf allgemeinen Graphen schwierigen Probleme können auf chordalen Graphen effizient berechnet werden. Dafür wird meist ein Perfektes Eliminationsschema des Graphen (s. Kapitel 3) genutzt.
Einige der wichtigsten Probleme sind das Finden der Chromatischen Zahl, einer Maximalen Unabhängigkeitsmenge, einer Maximalen Clique und einer minimalen Cliquenüberdeckung. Die **Chromatische Zahl** $\chi(G)$ eines Graphen G ist die kleinste Zahl k, für die G zulässig k-färbbar ist.

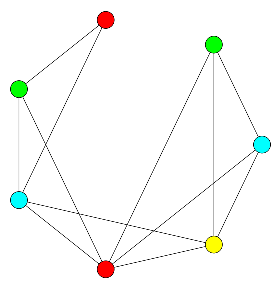


Abbildung 2.4: Die Chromatische Zahl beträgt hier vier

Eine **unabhängige Menge** eines Graphen G ist eine Teilmenge der Knotenmenge, deren Elemente paarweise nicht adjazent sind. Eine **maximale unabhängige Knotenmenge** ist eine unabhängige Knotenmenge maximaler Kardinalität.

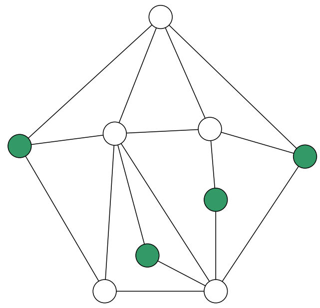


Abbildung 2.5: Eine maximale unabhängige Menge

Als **Clique** eines Graphen G wird ein vollständiger Teilgraph von G bezeichnet. Eine Clique wird **maximal** genannt, wenn man keinen weiteren Knoten v aus G hinzufügen kann, so dass sie mit v immer noch eine Clique bildet. Als **Cliquenüberdeckung** eines Graphen G wird eine Menge von Cliquen bezeichnet in der jeder Knoten von G mindestens einmal enthalten ist.

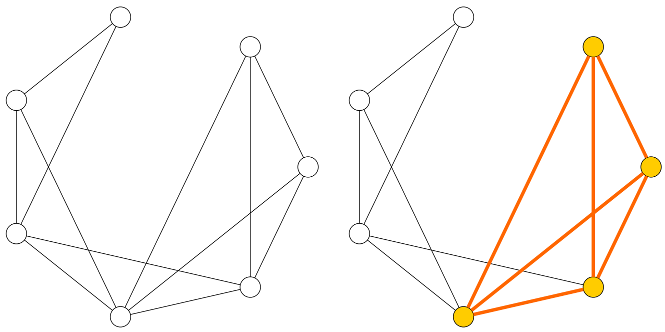


Abbildung 2.6: Ein Graph und ein Beispiel für eine Clique dieses Graphen

Für den Algorithmus zum Finden einer Maximalen unabhängigen Menge brauchen wir zunächst folgende Notationen: Seien die Knoten durch das PES durchnummeriert von 0 bis $n-1$, dann sind $\mathcal{N}^-(v_i)$ die Nachbarn von v_i, die vom PES einen niedrigeren Index als i zugeordnet bekamen. Analog dazu besteht $\mathcal{N}^+(v_i)$ aus den Nachbarn, deren Index größer als i ist.

Algorithm 1: Algorithmus zum Finden einer Maximalen unabhängigen Menge

$I = \emptyset$
for $i = 0$ **to** $n - 1$ **do**
  if $\mathscr{N}^-(v_i) \bigcap I = \emptyset$ **then**
    $I = I \bigcup i$
  end
end

Der Algorithmus zum Finden der chromatischen Zahl läuft ähnlich ab.

Algorithm 2: Algorithmus zum Finden der chromatischen Zahl

$I = \emptyset$
for $i = n - 1$ **DownTo** 0 **do**
  ordne Knoten i die kleinste mögliche Farbe zu, die nicht in $\mathscr{N}^-(v_i)$ enthalten ist
end

2.3 Sätze

Eine Teilmenge S der Knotenmenge eines zusammenhängenden Graphen G wird **Seperator, Trenner** oder auch **trennende Knotenmenge** genannt, wenn G_{V-S} nicht mehr zusammenhängend ist. [15]

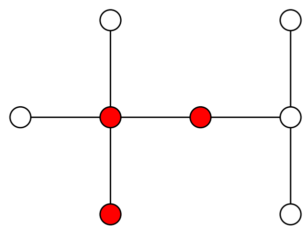


Abbildung 2.7: Eine trennende Knotenmenge

Ein Trenner wird **a-b-Trenner** genannt, wenn a und b in verschiedenen zusammenhängenden Komponenten des Graphen G_{V-S} liegen, wobei $a, b \in V$. [15]

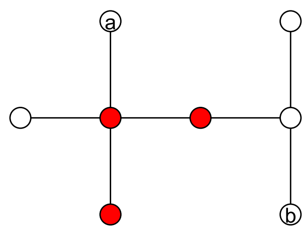


Abbildung 2.8: Ein a-b-Trenner

Sei S ein a-b-Trenner. S ist ein **minimaler a-b-Trenner**, wenn keine echte Teilmenge von S ebenfalls ein a-b-Trenner ist. [15]

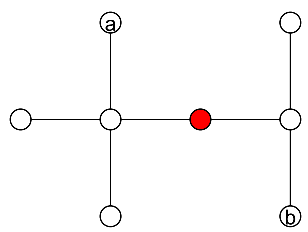


Abbildung 2.9: Ein minimaler a-b-Trenner

Theorem 3 (Dirac 1961)
*Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann **chordal**, wenn jeder minimale a-b-Trenner zu zwei Knoten $a, b \in V$ eine Clique ist.*

Der Beweis hierzu findet sich im Buch von Golumbic ([2]).

Satz 4
Chordalität ist eine vererbbare Eigenschaft. Das heißt, dass jeder induzierte Teilgraph eines chordalen Graphen wiederum ein chordaler Graph ist. [6]

Im Handbook Of Graph Theory ([6]) findet sich der zugehörige Beweis.<

2.4 Literaturübersicht

Chordale Graphen wurden als Erstes in dem im Jahr 1958 in der ersten Ausgabe des Journals „Annales Universitatis Scientarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica“ erschienenen Artikel „Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen“ von A. Hajnal und J. Surányi untersucht. Auch Dirac beschäftigte sich 1961 mit dem Thema und veröffentlichte in den Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg das Paper „ On rigid circuit graphs“ (s. [16]). Später fasste Donald J. Rose mit dem 1970 im Vol. 32 des Journal of Mathematical Analysis and Applications veröffentlichten Artikel „Triangulated graphs and the elimination process“ ebenfalls das Thema auf.

3 Erkennung chordaler Graphen

***Definition* 5**
Ein Knoten $v \in V$ des Graphen $G = (V, E)$ wird **simplizial** genannt, wenn er mit all seinen Nachbarn eine Clique bildet.

Simpliziale Knoten bilden die Grundlage von perfekten Eliminationsordnungen.

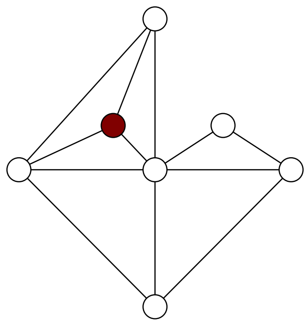


Abbildung 3.1: Ein simplizialer Knoten

Lemma 6 (Dirac 1961)
Jeder chordale Graph G hat einen simplizialen Knoten und wenn er nicht vollständig ist hat er zwei nicht adjazente simpliziale Knoten. [14]

Der Beweis hierzu findet sich im Buch von Golumbic ([2])

Eine Knotenordnung α von G ist eine Bijektion $\alpha : V \to \{1, 2, ..., n\}$. Bequemerweise wird eine Knotenordnung durch geeignete Indizierung der Knotenmenge gekennzeichnet, so dass $\alpha(v_i) = i$ ist, für $1 \leq i \leq n$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\mathscr{L}_i$ die Menge der Knoten mit dem Index größer $i - 1$. Die Menge $\mathscr{M}(v_i)$ wird wie folgt definiert

$$\mathscr{M}(v_i) := \{v_j \in \mathscr{N}(v_i) | j > i\} = \mathscr{M}(v_i) \cap \mathscr{L}_{i+1},$$

wobei $\mathscr{N}(v_i)$ die Menge aller zu v_i benachbarten Knoten darstellt.

***Definition* 7**
Sei $v_1, ..., v_n$ eine Ordnung von V. Ein **perfektes Eliminationsschema** (PES) ist eine Ordnung α bei der v_i in $G_{\mathscr{L}_i}$ simplizial ist.

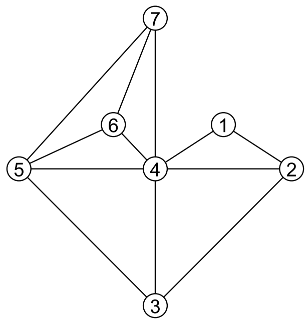


Abbildung 3.2: Ein PES eines Graphen

Der nachfolgende Beweis des Satzes 8 ist von Blair und Peyton [8].

Satz 8 (Fulkerson & Gross 1965)
Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er ein perfektes Eliminationsschema besitzt. [8]

Beweis.
Angenommen G ist chordal. Wir wollen die Existenz eines PES mittels Induktion über die Anzahl der Knoten zeigen. Der Fall mit n=1 ist trivial. Sei nun $n > 1$ und wir nehmen an, dass jeder chordale Graph mit weniger Knoten ein PES besitzt. Laut Lemma 6 hat G einen simplizialen Knoten v. $G \setminus v$ ist ein chordaler Graph mit weniger Knoten als G. Daraus folgt durch Induktion, dass $G \setminus v$ ein PES β hat. Wenn α mit dem Knoten v beginnt und ergänzt wird durch die verbleibenden Knoten von G, in der von β vorgegebenen Reihenfolge, so ist α ein PES von G.
Nun wird nur angenommen, dass G ein PES α hat, gegeben durch $v_1, ..., v_n$. Es wird nun nach einer Kante aus einem beliebigen Kreis μ von G der mindestens Länge 4 hat gesucht. Sei v_i der Knoten in μ dessen Index kleiner ist als der aller anderen Knoten dieses Kreises. Da α ein PES ist, ist $\mathscr{M}(v_i)$ vollständig. Dies bedeutet, dass μ mindestens eine Kante haben muss, nämlich die Kante, die die beiden Nachbarknoten von v_i in μ verbindet $\square$

Ein Erkennungsalgorithmus für chordale Graphen wird durchgeführt, indem in jedem Schritt ein simplizialer Knoten entfernt wird. Ist einmal kein solcher Knoten zu finden, ist der Graph nicht chordal. [6] Die sequentiellen Algorithmen um auf Chordalität zu testen, beruhen auf dem Prinzip eine perfekte Eliminationsordnung zu finden. Bekannte Algorithmen hierfür sind die lexikographische Breitensuche (LBS) und die Maximum Cardinality Search (MCS), welche beide im Kapitel 5 genauer vorgestellt werden. Weitere Algorithmen sind Maximal Element in Component (MEC) und Maximum Cardinality neighborhood in Component (MCC). Chordale Graphen können in linearer Zeit erkannt werden.

Proposition 9
Wenn G eine perfekte Eliminationsordnung besitzt, so besitzt auch jeder seiner induzierten Teilgraphen eine PEO.

Beweis.
Sei G ein chordaler Graph und H ein beliebiger induzierter Teilgraph von G. Mit Satz 4 folgt, dass H ebenfalls chordal ist und da laut Satz 8 jeder chordale Graph ein PEO besitzt folgt die Proposition. □

4 Zusammenhang zu anderen Graphenklassen

Die einfachsten Beispiele für chordale Graphen sind unter anderem die vollständigen Graphen und die Bäume. Natürlich gibt es aber noch genug andere Graphenklassen die mit den chordalen Graphen zusammenhängen.

4.1 Perfekte Graphen

Was unter der Cliquenüberdeckung eines Graphen zu verstehen ist wurde bereits in Abschnitt 2.2 erklärt.

***Definition* 10**
Die **Partitionszahl** $\rho(G)$ eines Graphen G ist die Größe der kleinesten Cliquenüberdeckung von G. [6]

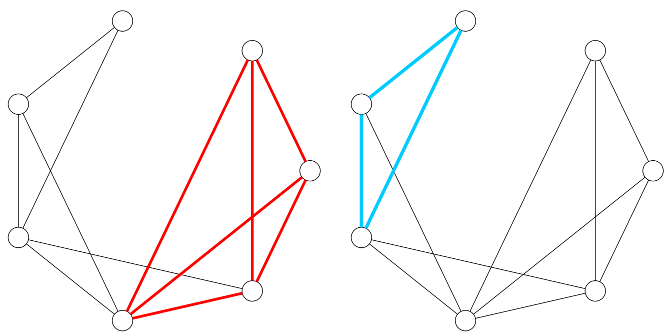


Abbildung 4.1: Dieser Graph hat die Partitionszahl zwei

***Definition* 11**
Die **Unabhängigkeitszahl** $\alpha(G)$ eines Graphen G ist die Mächtigkeit der größten unabhängigen Knotenmenge in G.

***Definition* 12**
Die **Cliquenzahl** $\omega(G)$ eines Graphen G ist die Mächtigkeit einer größten Clique von G.

In Abbildung 4.1 lässt sich die Mächtigkeit einer größten Clique leicht als vier erkennen.

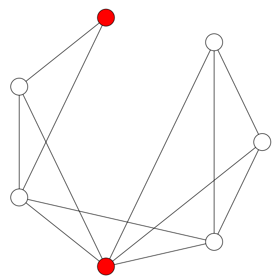


Abbildung 4.2: Hier besteht die größte unabhängige Knotenmenge aus zwei Knoten

Wenn für jeden nichtleeren induzierten Teilgraphen H von G gilt $\alpha(H) = \rho(H)$ besitzt ein Graph die perfekte Eigenschaft $\mathbf{P_1}$ oder ist $\boldsymbol{\alpha}$**-perfect** .[6] Ein Graph besitzt die perfekte Eigenschaft $\mathbf{P_2}$ oder ist $\boldsymbol{\omega}$**-perfekt** wenn für jeden nichtleeren induzierten Teilgraphen H von G gilt $\omega(H) = \chi(H)$.[6] Hajanal und Surányi zeigten 1958, dass chordale Graphen die Perfekte Eigenschaft P_2 erfüllen und Berge zeigte 1960, dass sie auch P_1 erfüllen. [2] Ein Graph heißt **perfekt**, wenn er sowohl α-perfekt als auch ω-perfekt ist.

***Definition* 13**
Die **Multiplikation** $G \circ x$ von G im Knoten x ist definiert als
$V(G \circ x) = V \bigcup \{x'\}$,
$E(G \circ x) = E \bigcup \{(x', v) : v \in V \text{und} (x, v) \in E\}$

Lemma 14 (Fulkerson 1971, Lovász 1972)
Sei G ein ungerichteter Graph, dessen induzierte Teilgraphen (P_2) erfüllen, und sei H aus G gewonnen durch Multiplikation von Knoten. Wenn G (P_3) erfüllt, so erfüllt auch $H(P_3)$.

Theorem 15 (The Perfect Graph Theorem, Lovász 1972)
Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(P_1) $\omega(G_A) = \chi(G_A) \quad \forall A \subseteq V$

(P_2) $\alpha(G_A) = \rho(G_A) \quad \forall A \subseteq V$

(P_3) $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A| \quad \forall A \subseteq V$

Beweis (The Perfect Graph Theorem).
Wir setzen voraus, dass Theorem 15 wahr ist für alle Graphen mit weniger Knoten als G.

$(P_1) \Rightarrow (P_3)$. Angenommen, wir können G_A mit $\omega(G_A)$ Farben färben. Da mindestens $\alpha(G_A)$ Knoten in einer gegebenen Farbe gefärbt sind, gilt $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |G_A|$.

$(P_3) \Rightarrow (P_1)$. $G = (V, E)$ erfülle (P_3); dann erfüllt durch Induktion jeder Teilgraph von G $(P_1) - (P_3)$. Es genügt zu zeigen, dass $\omega(G) = \chi(G)$.
Wenn wir eine unabhängige Menge U von G hätten, so dass $\omega(G_{V-U}) < \omega(G)$, so könnten wir U in einer Farbe färben und G_{V-U} in $\omega(G) - 1$ anderen Farben färben. Dann hätten wir $\omega(G) = \chi(G)$.
Angenommen G_{V-U} hat eine $\omega(G)$-Clique K(U) für jede unabhängige Menge U von G. Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller unabhängigen Mengen von G, wobei $U \cap K(U) = \emptyset$. Für jedes $x_i \in V$ sei h_i die Anzahl der Cliquen $K(U)$ die x_i enthalten. Sei $H = (X, F)$ der Graph, den wir aus G durch Vervielfachen der Knoten mittels Multiplizieren der x_i mit h_i erhalten. Einerseits ist durch Lemma 14
$\omega(H)\alpha(H) \geq |X|$.
Andererseits kann man durch einfaches Argumentieren leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned}
|X| &= \sum_{x_i \in V} h_i \\
&= \sum_{U \in \mathscr{S}} |K(U)| = \omega(G)|\mathscr{S}|, \\
\omega(H) &\leq \omega(G), \\
\alpha(H) &= \max_{T \in \mathscr{S}} \sum_{X_i \in T} h_i \\
&= \max_{T \in \mathscr{S}} \left[\sum_{T \in \mathscr{S}} |T \cap K(U)| \right] \\
& le|\mathscr{S}| - 1,
\end{aligned}$$

Dies vermittelt zusammen den Eindruck, dass
$\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(G)(|\mathscr{S}| - 1) < |X|$,
was einen Widerspruch darstellt.

$(P_2) \Leftrightarrow (P_3)$. Aus dem was bis jetzt bewiesen wurde folgt:

$$\begin{aligned}
G \text{ erfüllt } (P_2) &\Leftrightarrow \overline{G} \text{ erfüllt } (P_1) \\
&\Leftrightarrow \overline{G} \text{ erfüllt } (P_3) \Leftrightarrow G \text{ erfüllt } (P_3)
\end{aligned}$$

□

Die Beweise hierzu sind wiederum beide aus dem Buch von Golumbic ([2]) entnommen. Laut Golumbic [2] war die Klasse der chordalen Graphen eine der ersten Graphenklassen, die als perfekt erkannt wurden. Für nachfolgenden Satz findet man den Beweis in einer Arbeit von Hougardy, Kreuter, Prömel und Steger ([13]).

Satz 16
Chordale Graphen und deren Komplemente sind perfekt.

4.2 Weitere Oberklassen

Weitere Oberklassen der chordalen Graphen sind die schwach chordalen Graphen und die „even-hole-free“ Graphen sowie die „odd-free-hole“ Graphen. Dies ist leicht damit zu begründen, dass die chordalen Graphen keine Kreise besitzen, deren Länge mehr als drei ist.

***Definition* 17**
Ein Graph G ist **schwach chordal**,falls G und $\overline{G}$ keinen induzierten Kreis von der Länge größer 5 besitzen.[5]

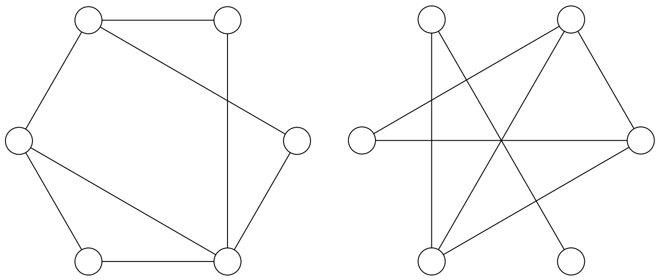


Abbildung 4.3: Ein schwach chordaler Graph und sein Komplement

***Definition* 18**
Ein Graph ist **„even-hole-free“**, wenn er keinen induzierten Kreis von gerader Länge besitzt.

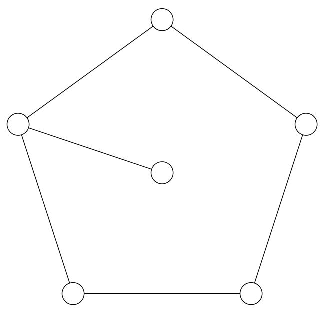


Abbildung 4.4: Ein even-hole-free Graph

***Definition* 19**
Ein Graph ist **„odd-hole-free“**, wenn er keinen induzierten Kreis C_k besitzt, mit k ungerade und $k > 3$.

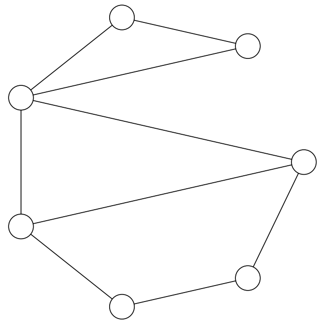


Abbildung 4.5: Ein odd-hole-graph

4.3 Stark chordale Graphen

Die stark chordalen Graphen sind eine wichtige Unterklasse der chordalen Graphen. Folgende Definitionen sind äquivalent:

***Definition* 20**
Ein Graph G heißt **stark chordal** wenn gilt:

(I) G ist chordal und jeder Kreis der Länge k, wobei $k \leq 6$ und gerade, besitzt eine ungerade Sehne

(II) G besitzt eine starke Eliminationsordnung

Eine **ungerade Sehne** eines Kreises ist eine Kante zwischen zwei Knoten, wobei deren Abstand im Kreis ungerade ist.

***Definition* 21**
Als **starke Eliminationsordnung** (SEO) wird eine perfekte Eliminationsordnung α bezeichnet, für die zusätzlich gilt, dass $\forall i < j, k < l : v_i v_k, v_i v_l, v_j v_k \in E \Rightarrow v_j v_l \in E$.

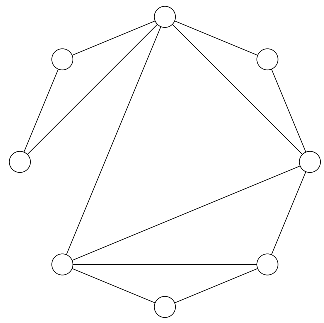


Abbildung 4.6: Ein stark chordaler Graph

4.4 Intervallgraphen

Eine weitere Unterklasse der chordalen Graphen sind die Intervallgraphen.

***Definition* 22**
Gegeben seien eine endliche Anzahl an Intervallen (auf einer Geraden). Ein Graph der mit dieser Menge verknüpft ist kann wie folgt konstruiert werden. Jedes Intervall wird einem Knoten zugeordnet und die Knoten sind genau dann adjazent, wenn sich die dazugehörigen Intervalle mindestens teilweise überlappen. Solch ein Graph wird **Intervallgraph** genannt.

Man kann aus einem ungerichteten Graphen G einen gerichteten Graphen erhalten indem man jeder Kante eine Richtung zuweist. Dies wird auch **Orientierung** von G genannt. Ein gerichteter Graph heißt **transitiv**, wenn folgende Gleichung gilt:

$$(x, y) \in E \text{ und } (y, z) \in E \Rightarrow (x, z) \in E \tag{4.1}$$

***Definition* 23**
Ein ungerichteter Graph ist ein **Vergleichbarkeitsgraph**, wenn er eine transitive Orientierung besitzt.

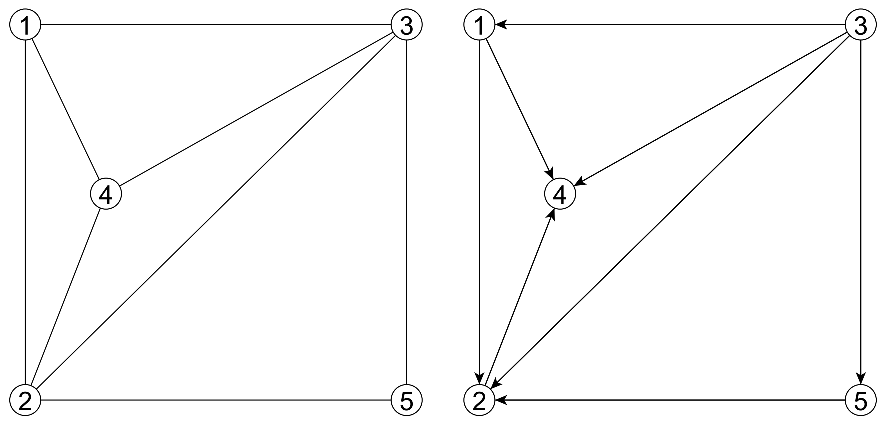


Abbildung 4.7: Ein Graph und eine zugehörige transitive Orientierung

Die Bedingung für die Transitivität kann man in Abbildung 4.7 leicht überprüfen. Laut Gleichung (4.1) sollte zum Beispiel eine Kante von 3 nach 2 existieren, da sowohl eine Kante von 3 nach 1, als auch von 1 nach 2 existiert. Dies gilt auch für alle anderen Kanten des Graphen. Somit besitzt dieser Graph eine transitive Orientierung.

Theorem 24 (Gilmore und Hoffmann, 1964)
Sei G ein ungerichteter Graph. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(I) G ist ein Intervallgraph

(II) G besitzt keinen sehnenfreien Kreis der Länge vier und sein Komplement ist ein Vergleichbarkeitsgraph

(III) Die maximalen Cliquen von G können linear geordnet werden, so dass für jeden Knoten v von G die Cliquen ihn fortlaufend enthalten

Der Beweis dafür lässt sich in [2] nachlesen.

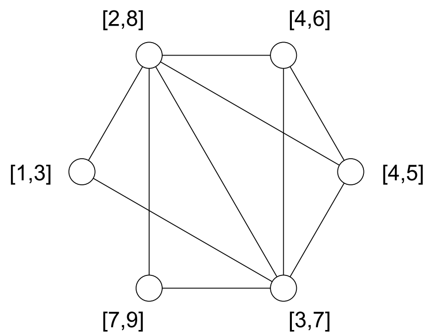


Abbildung 4.8: Ein Beispiel für einen Intervallgraphen

4.5 Splitgraphen

Splitgraphen sind eine Spezielle Klasse der chordalen Graphen. Ein Graph wird **Splitgraph** genannt, wenn er in einen vollständigen Graphen mit der Knotenmenge W und in eine unabhängige Knotenmenge K unterteilt werden kann, wobei $V = W \bigcup K$.

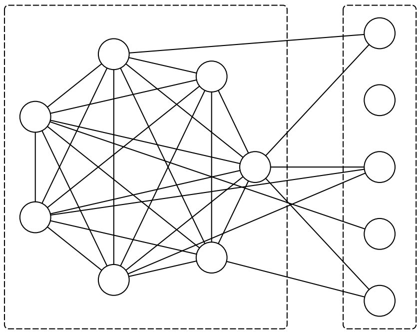


Abbildung 4.9: Ein Beispiel für einen Splitgraphen

Theorem 25 (Földes und Hammer, 1977)
Sei G ein ungerichteter Graph. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(I) G ist ein Splitgraph

(II) G und $\overline{G}$ sind chordale Graphen

(III) G enthält keinen induzierten Teilgraph der isomorph zu $2K_2, C_4$ oder C_5

Der Beweis dafür befindet sich in AGT & PG ([2]).

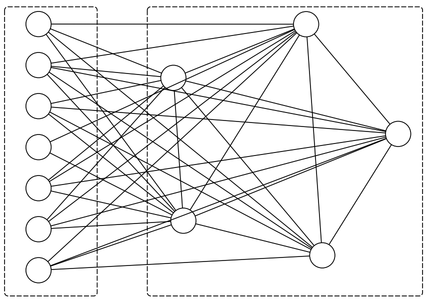


Abbildung 4.10: Das Komplement des Splitgraphen aus Abb. 4.9

4.6 Bäume

Die Klasse der Bäume ist ebenfalls eine Unterklasse der chordalen Graphen.

***Definition* 26**
Ein **Baum** ist ein schlichter, zusammenhängender und kreisfreier Graph.

Daraus ist leicht zu erkennen, dass ein Baum die Chordalitätseigenschaft erüllt. Es gibt aber noch einen weiteren interessanten Zusammenhang der nachfolgend beschrieben werden soll. Der Beweis zu folgendem Theorem findet sich im Buch von Golumbic ([2]).

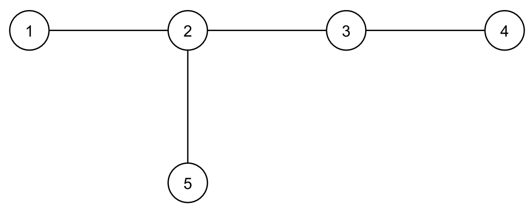
Theorem 27
Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er der Schnittgraph einer Menge von Teilbäumen eines Baumes ist.

Durch Entfernen beliebiger Knoten und Kanten aus dem Ursprungsgraphen entsteht ein **Teilbaum** eines Baumes.

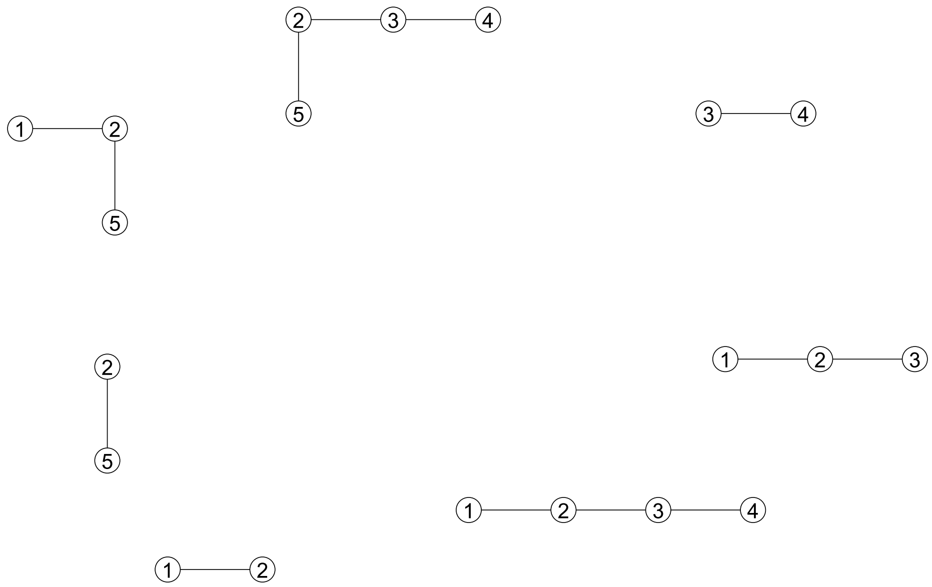
***Definition* 28**
Als **Schnittbaum** wird ein Graph bezeichnet, dessen Knoten die einzelnen Mengen eines Mengensystems darstellen. Die Knoten sind genau dann adjazent, wenn die Schnittmenge der jeweiligen Mengen nichtleer ist.

Bildet man schließlich den Schnittgraph von Teilbäumen eines Baumes entsteht ein chordaler Graph.

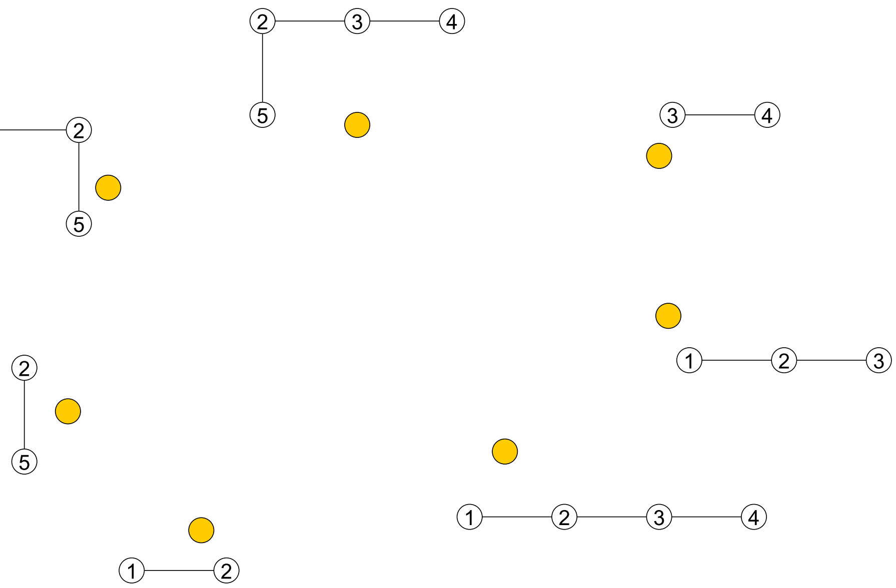
Folgendes Beispiel soll verdeutlichen, wie anhand dieser Definition aus einem Baum ein chordaler Graph geformt wird. Begonnen wird mit einem Graphen mit fünf Knoten und vier Kanten.



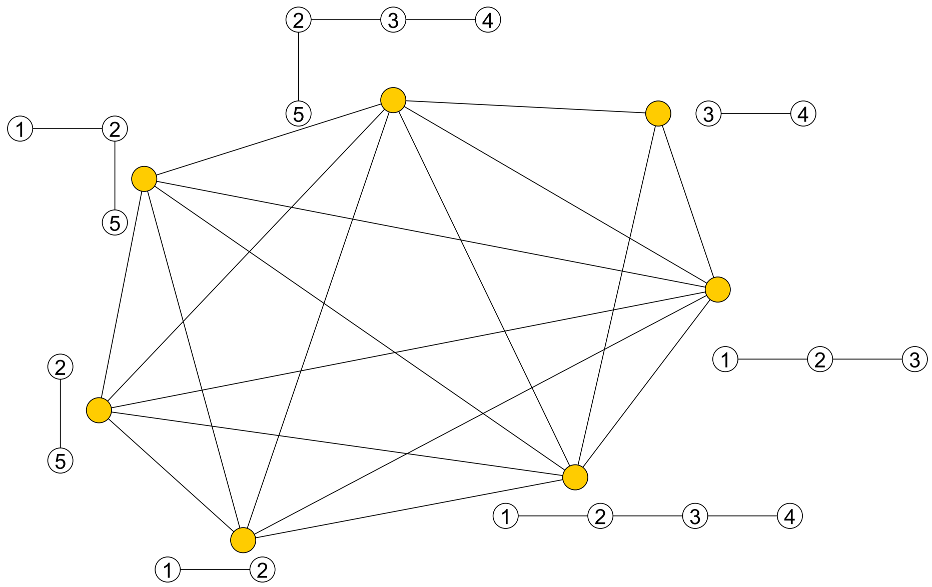
Von diesem wird nun eine Menge an Teilbäumen ausgewählt.



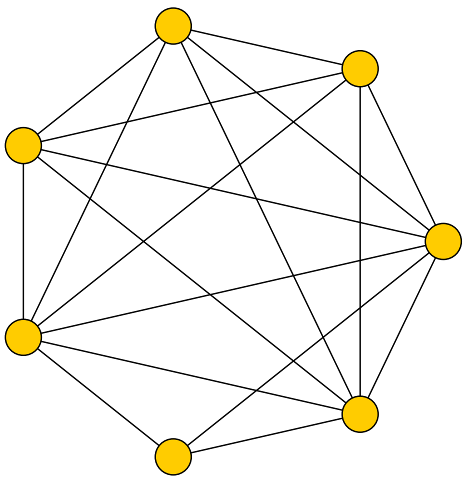
Dann wird für jeden Teilbaum ein Knoten gesetzt.



Anschließend werden wie oben beschrieben die Kanten des Schnittgraphen eingefügt.



Zum Schluss werden nur noch die Knoten und Kanten die nicht zum Schnittgraphen gehören entfernt und nach ein paar Umformungen erhalten wir folgenden Graphen.



5 Algorithmische Anwendungen

Es gibt mehrere Greedy-Algorithmen für chordale Graphen. Die bekanntesten sind die Lexikographische Breitensuche (LBS) und die Maximum cardinality search (MCS). Rose, Tarjan und Lueker entwickelten die LBFS als den ersten Algorithmus, der ein PES in linearer Zeit fand. Später erstellte Tarjan einen einfacheren Algorithmus, der als MCS bekannt wurde.

5.1 Lexikographische Breitensuche

Die Lexikographische Breitensuche ist eine abgewandelte Version der Breitensuche die von Rose, Tarjan und Lueker eingeführt wurde. Sie entwickelten sie um eine perfekte Eliminationsordnung in Graphen finden zu können. Die LBS erzeugt ein PES in umgekehrter Reihenfolge.

Die Breitensuche findet kürzeste Wege in einem Graphen von einem gegebenen Knoten zu anderen Knoten.
Am Anfang erhalten alle Knoten ein leeres Label $\forall v \in V : L(v) = \emptyset$. In die Labels wird immer die Nummer des am frühesten nummerierten Nachbarn eingetragen. Ist einmal eine Nummer im $L(v)$ eingetragen, ändert sich diese im Laufe des Algorithmus nicht mehr. Von den Knoten die noch nicht nummeriert sind, wird stets der nummeriert, der das niedrigste Label besitzt. Wenn mehrere Knoten das gleiche Label besitzen, wird willkürlich einer ausgewählt.
Bei der Lexikographischen Breitensuche wird nicht nur der am frühesten nummerierte Knoten betrachtet, sondern auch der zweitfrüheste usw.. Daher stammt auch die Bezeichnung Lexikographische Breitensuche. Jedem Knoten $v \in V$ wird wieder ein Label $L(v)$ zugeordnet, welches aber im Verlauf der Nummerierung immer wieder aktualisiert wird, indem die Nummern neu nummerierter Nachbar einfach hinten angefügt werden. Damit sind die Labels hier absteigend geordnete Teilmengen von $1, 2, ..., n$.

Algorithm 3: Lexikographische Breitensuche (LBS)

Eingabe: Ein Graph G und ein Startknoten u
Ausgabe: Eine LBS Sortierung σ von V
begin
  forall $v \in V$
  $L(v) = \emptyset$ (Jedem Knoten wird ein leeres Label zugeordnet)
  $\sigma(u) = n$
  forall $v \in \mathcal{N}(u)$
  $L(v) = (u)$
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $\sigma(w) \rightarrow n - i : L(w) \geq L(x) \quad \forall x \in V \quad \sigma(x) = \emptyset$ (Wähle einen unnummerierten Knoten w mit dem höchsten Label und ordne ihm $n - i$ zu)
    $\forall u \in \mathcal{N}(w) : \sigma(u) = \emptyset \quad L(u) = L(u) \bigcap n - i$
    (Füge allen Labels der zu w benachbarten und noch nicht nummerierten Knoten u die Zahl $n - i$ hinzu)
  end
end

Theorem 29
Ein Graph G ist chordal genau dann, wenn die Knotenordnung, die von der LBS erzeugt wurde, eine perfekte Eliminationsordnung ist.

Den Beweis hierzu kann man wieder im Buch von Golumbic ([2]) nachlesen.

5.2 Maximum cardinality search

Dieser Algorithmus liefert in linearer Zeit ein perfektes Eliminationsschema für einen chordalen Graphen.[6] Er ordnet die Knoten in umgekehrter Reihenfolge an, beginnend mit einem beliebigen Knoten $v \in V$ für den gilt, dass $\alpha(v) = n$. In jedem folgendem Schritt wählt der Algorithmus den noch nicht nummerierten Knoten, der zu den meisten bisher schon nummerierten Knoten adjazent ist.

Algorithm 4: Maximum Cardinality Search (MCS)

Eingabe: Ein Graph G
Ausgabe: Ein PES α Graphen G
$\mathscr{L}_{n+1} \leftarrow \emptyset$
begin
  for $i \leftarrow n$ **DownTo** 1 **do**
    Wähle einen Knoten $v \in V - \mathscr{L}_{i+1}$ für den $|\mathscr{N}(v) \bigcap \mathscr{L}_{i+1}|$ das Maximum erreicht;
    $\alpha(v) \leftarrow i$; *(v wird zu v_i)*
    $\mathscr{L}_i \leftarrow \mathscr{L}_{i+1} \bigcup \{v_i\}$
  end
end

Um zu zeigen, dass dies tatsächlich ein perfektes Eliminationsschema eines chordalen Graphen ausgibt, brauchen wir zunächst das folgende Lemma und das Theorem. Der Beweis dafür ist wieder aus Blair und Peyton [8] entnommen.

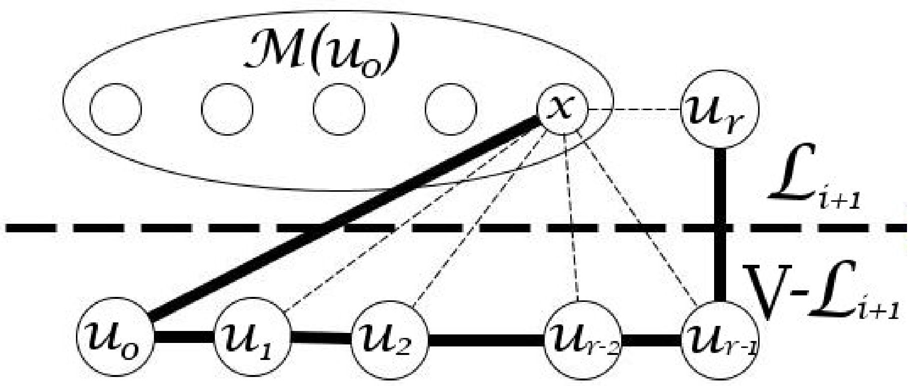
Lemma 30
Eine Ordnung α der Knoten von G ist kein perfektes Eliminationsschema genau dann, wenn für einen Knoten v ein längerer sehnenloser Pfad existiert als von $v = \alpha^{-1}(i)$ zu einem Knoten in $\mathscr{L}_{i+1}$ über Knoten in $V - \mathscr{L}_i$.

Theorem 31
Jede Ordnung, die der Maximum Cardinality Search Algorithmus findet, ist ein perfektes Eliminationsschema.

Beweis.
Sei α irgendeine Ordnung eines chordalen Graphen die keine perfekte Eliminationsordnung ist. Wir zeigen, dass sie keinesfalls vom MCS Algorithmus erzeugt werden kann. Laut Lemma 30 existiert für einen Knoten u_0 ein sehnenloser Pfad $\mu = [u_0, u_1, ..., u_{r-1}, u_r]$ der Länge $r \geq 2$ von $u_0 = \alpha^{-1}(i)$ bis $u_r \in \mathscr{L}_{i+1}$ über Knoten $u_j \in V - \mathscr{L}_i$, $\quad 1 \leq j \leq r-1$. (s. Algorithmus 4) Wähle u_0 so, dass der Index $i = \alpha(u_0)$ maximal ist unter allen Knoten von G für die solch ein Pfad existiert.
Um zu Zeigen, dass α keine von MCS erzeugte Ordnung ist reicht es aus, dass ein paar Knoten $w \in V - \mathscr{L}_{i+1}$ existieren, für die $|\mathscr{N}(w) \bigcap \mathscr{L}_[i+1]|$ größer ist als $|\mathscr{N}(u_0) \bigcap \mathscr{L}_[i+1]|$. Wir zeigen, dass der Knoten $u_{r-1} \in \mu$ tatsächlich solch ein Knoten ist. Man beachte, dass $\mathscr{N}(u_0) \bigcap \mathscr{L}_{i+1}$ und $\mathscr{M}(u_0)$ laut Definition identisch sind. Daher ist nur zu zeigen, dass

$$\mathscr{M}(u_0) \subset \mathscr{N}(u_{r-1}) \bigcap \mathscr{L}_{i+1}. \tag{5.1}$$

Für den trivialen Fall $\mathscr{M}(u_0) = \emptyset$ gilt das Theorem, da u_{r-1} adjazent ist zu $u_r \in \mathscr{L}_{i+1}$. Stattdessen wird angenommen, dass $\mathscr{M}(u_0) \neq \emptyset$ und es wird ein Knoten $x \in \mathscr{M}(u_0)$. Um zu sehen, dass x auch adjazent ist zu u_{r-1}, wird der Pfad $\gamma = [x, u_0, u_1, ..., u_{r-1}, u_r]$ in nachfolgender Abbildung betrachtet.



Da i maximal ist hat jeder Pfad von einer Länge größer als eins eine Sehne, wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) die Endknoten des Pfades haben einen Index größer als i

(b) die inneren Knoten haben einen Index der kleiner ist als das Minimum der Indizes der beiden Endknoten

Der Pfad γ erfüllt diese beiden Bedingungen und hat daher eine Sehne. Außerdem hat $\mu = [u_0, u_1, ..., u_{r-1}, u_r]$ keine Sehne und daher ist jede Kanten von γ inzident zu x. Sei u_k der Knoten, der von den zu x adjazenten Knoten in γ den größten Index hat. Wenn $k \neq r$, dann ist $[x, u_k, ..., u_r]$ ein sehnenloser Pfad, was im Widerspruch dazu steht, dass i maximal ist, da $(x, u_r) \in E$.
Es folgt, dass $\sigma = [x, u_0, ..., u_{r-1}, u_r, x]$ ein Kreis von einer Länge größer als 3 ist in G (wobei $r \geq 2$). Da G chordal ist muss σ eine Sehne haben und, wie oben schon argumentiert, eine solche Sehne muss zu x inzident sein. Sei u_t der Knoten in σ mit dem größten Index ungleich r, für den gilt $(x, u_t) \in E$. Wenn $t \neq r - 1$, dann ist $[x, u_t, ..., u_r, x]$ ein sehnenloser Kreis der Länge größer 3, was im Widerspruch zur Chordalität des Graphen steht. Daher ist $(x, u_{r-1}) \in E \forall x \in \mathscr{M}(u_0)$. Aber u_{r-1} ist auch adjazent zu $u_r \in \mathscr{L}_{i+1} - \mathscr{M}(u_0) \Rightarrow$ Gleichung (5.1) gilt. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Donald J. Rose: „Triangulated graphs and the elimination process“, Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 32, Issue 3, Seiten 597-609, Dezember 1970

[2] Martin Charles Golumbic: „Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs“, 1980

[3] Reinhard Diestel: „Graphentheorie“, 3. Auflage, 2006

[4] Douglas Brent West: „Introduction to Graph Theory“, 1996

[5] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, Jeremy P. Spinrad: „Graph Classes - A Survey“, 1999

[6] Jonathan L. Gross, Jay Yellen: „Handbook of Graph Theory“, 2004

[7] Philip N. Klein: „Efficient parallel algorithms for Chordal Graphs“, SIAM J. COMPUT. Vol. 25, No. 4, pp. 797-827, August 1996

[8] Jean R.S. Blair, Barry W. Peyton: „An Introduction to Chordal Graphs and Clique Trees“, Oak Ridge National Laboratory, November 1992

[9] Michel Habib, Juraj Stacho: „Reduced clique graphs of chordal graphs.“, European Journal of Combinatorics, 2011

[10] http://www.or.uni-bonn.de/ hougardy/paper/ga.pdf; 07.09.2012

[11] Frank Kammer: „Baumähnliche und chordale Graphen: Algorithmen und Verallgemeinerungen“,Universität Augsburg, 22. Oktober 2010

[12] Matthias Biermann: „Erkennen von Graphenklassen mittels lexikographischer Breitensuche“, FernUniversität Hagen, 02. Oktober 2007

[13] S. Hougardy, B. Kreuter, H.J. Prömel, A. Steger: „Einführung in Graphen und Algorithmen“, Humboldt-Universität Berlin, 13. September 1996

[14] www.cs.technion.ac.il/ dang/courseBN/S2-Chordal%20Graphs.pptx; 02.10.2012

[15] A. Berry, R. Pogorelcnik, G. Simonet: „An Introduction to Clique Minimal Separator Decomposition“, General electric series 197-215, 2010

[16] G. A. Dirac: „On rigid circuit graphs“, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg Vol. 25: 71-76, 1961

[17] Klaus Simon: „A Note on Lexicographic Breadth First Search for Chordal Graphs“, Institut für Theoretische Informatik Zürich, 3. Mai 1994

[18] http://mathworld.wolfram.com/ChordalGraph.html; 01.10.2012

[19] http://www.cse.iitb.ac.in/ aad/cs602/; 29.12.2012

[20] http://www.graphclasses.org/classes.cgi

[21] http://www.its.caltech.edu/ padraic/mathcamp_2011/perfectgraphs/MC2011_perfectgraphs_wk1_day3.pdf

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Chemnitz, den 23. Januar 2013

Maria Milaschewski